НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-203-212
УДК 519.63

Решение начально-краевой задачи в символьном виде

Вячеслав Васильевич ПРОВОТОРОВ[1] **, Михаил Анатольевич РЫБАКОВ**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Обсуждаются алгоритмы нахождения символьно-численного решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды. Аналитическое решение таких уравнений, как правило, невозможно, поэтому активно разрабатываются приближенные методы решения, обеспечивающие условие аппроксимации, устойчивости и сходимости. В данной статье предлагается символьное решение, что более удобно, чем численное для использования, например, при синтезе систем управления. В основе алгоритма лежит аппроксимация частных производных по одной из переменных разностным соотношением и применение преобразования Лапласа к полученной системе дифференциально-разностных уравнений. Представлена блок-схема алгоритма. Проводится описание структуры программного комплекса на основе разработанного алгоритма. Программный комплекс разработан на языке программирования Java. Для ввода исходных данных начально-краевой задачи и вывода решения используется веб-интерфейс. В основе веб-интерфейса программного комплекса лежит фреймворк Spring. Рассматривается пример решения начально-краевой задачи с начальным и краевыми условиями при помощи данного программного комплекса.

Результаты представляют интерес для исследователей в прикладных областях, связанных с переносом теплоты по сетевому теплоносителю, транспортировкой вязких жидкостей по сетевому гидроносителю, диффузионными процессами в биофизике. Разработанный алгоритм может найти свое применение для решения некоторых задач автоматического управления.

Ключевые слова: начально-краевая задача, система дифференциально-разностных уравнений, преобразование Лапласа, символьно-численное решение

Для цитирования: *Провоторов В.В., Рыбаков М.А.* Решение начально-краевой задачи в символьном виде // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 203–212. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-203-212

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-203-212

Solution of the initial boundary value problem in symbolic form

Vyacheslav V. PROVOTOROV[1] **, Mikhail A. RYBAKOV**[2]
[1] Voronezh State University
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. Algorithms for finding a symbolic-numerical solution of the initial- boundary value problem for a continuum transport equation are discussed. Analytical solution of such equations, as a rule, is impossible; therefore, approximate methods of solution that provide the condition of approximation, stability, and convergence are being actively developed. This article proposes a symbolic solution which is more convenient than a numerical one to be used, for example, in the synthesis of control systems. The algorithm is based on the approximation of partial derivatives with respect to one of the variables by a difference relation and the application of the Laplace transform to the resulting system of differential-difference equations. A block diagram of the algorithm is presented. The description of the structure of the software package based on the developed algorithm is carried out. The software package is developed in the Java programming language. To enter the initial data of the initial boundary value problem and output the solution, a web interface is used. The web interface of the software package is based on the Spring framework. An example of solving an initial boundary value problem with initial and boundary conditions using this software package is considered.

The results are of interest to researchers in applied areas related to heat transfer through a network coolant, transportation of viscous liquids through a network hydraulic carrier, and diffusion processes in biophysics. The developed algorithm can be used to solve some problems of automatic control.

Keywords: initial-boundary value problem, system of differential-difference equations, Laplace transform, symbolic-numerical solution

Mathematics Subject Classification: 65N22.

For citation: Provotorov V.V., Rybakov M.A. Solution of the initial-boundary value problem in symbolic form. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 203–212. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-203-212 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Современные системы компьютерной алгебры (СКА) предоставляют возможности решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды, для чего СКА содержат пакеты программ, которые базируются на различных приближенных методах. Однако, решение начально-краевой задачи в СКА носит вычислительно трудный характер. В связи с этим, одной из актуальных задач компьютерной алгебры является разработка более эффективных алгоритмов и программ решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды.

Приближенному решению начально-краевой задачи для уравнений в частных производных посвящены многочисленные работы. В частности, в [1–3] рассматривались методы, основанные на расщеплении по пространственным переменным с применением операционного исчисления, на использовании специальных разностных схем, позволяющих вычислять значения решения в узлах сеток различных типов (в частности, треугольных).

В данной статье к начально-краевой задаче для уравнения переноса сплошной среды применяется аппроксимация разностным соотношением частных производных по одной из двух переменных, в результате задача сводится к системе дифференциально-разностных уравнений. Для построения символьного решения полученной системы можно использовать, например, методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на полиномиальной аппроксимации (см. [4] и библиографию этой работы). Здесь предлагается построение символьного решения системы дифференциально-разностных уравнений, основанное на преобразовании Лапласа. Преобразование Лапласа позволяет перейти от системы дифференциально-разностных уравнений к системе алгебраических уравнений, решив которую и применив обратное преобразование Лапласа, в итоге получим решение в символьном виде. Алгоритмы символьного решения с использованием преобразования Лапласа для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами применялись в работах [5–7], с кусочно постоянными коэффициентами — в работе [8]. Распространению методов символьного решения обыкновенных дифференциальных уравнений на более общие классы уравнений, увеличению размерности решаемых систем без существенного увеличения машинного времени, повышению точности на основе распараллеливания вычислений посвящены работы [9–12]. На основе этих исследований разработан Программный модуль для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик систем автоматического управления [13].

Целью данной работы является разработка и программная реализация алгоритма нахождения символьно-численного решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды.

Статья разделена на четыре параграфа. В первом параграфе сформулирована начально-краевая задача для уравнения переноса и получена ее аппроксимация в виде системы дифференциально-разностных уравнений. Алгоритм решения рассматриваемой начально-краевой задачи сформулирован и описан во втором параграфе. В третьем параграфе представлен разработанный на основе предложенного алгоритма программный комплекс решения начально-краевой задачи для уравнения переноса. В четвертом заключительном параграфе представлены результаты решения конкретной начально-краевой задачи. Проведенный вычислительный эксперимент подтверждает эффективность разработанного программного комплекса.

1. Постановка задачи

Для уравнения переноса сплошной среды, представляющего собой уравнение параболического типа с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + cu(x,t), \quad (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \tag{1.1}$$

рассмотрим задачу с начальным условием

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.2}$$

и краевыми условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

В рассматриваемой начально-краевой задаче полагаем заданными числа $a, b, c,$ $a > 0,$ и непрерывную на отрезке $[0,1]$ функцию ϕ.

Аппроксимируем частную производную $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ разностным отношением вида

$$\frac{1}{\tau}(u(x,t_k) - u(x,t_{k-1})), \tag{1.4}$$

где $\tau = T/M,$ M — количество узлов, $t_k = k\tau,$ $k = 0,\ldots,M,$ и обозначим $u_k(x) = u(x,t_k),$ $k = 0,\ldots,M.$ В результате относительно неизвестных функций $u_k(x), k = 1,\ldots,M,$ получим систему дифференциально-разностных уравнений вида

$$\frac{1}{\tau}(u(x,t_k) - u(x,t_{k-1})) = au_k''(x) + bu_k'(x) + cu_k(x), \quad k = 1,\ldots,M, \tag{1.5}$$

где

$$u_0 = \phi(x)$$

с краевыми условиями

$$u_k(0) = 0, \quad u_k(1) = 0, \quad k = 1,\ldots,M. \tag{1.6}$$

Система (1.5) есть система M линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка (ЛОДУ 2-го порядка) с постоянными коэффициентами. Для каждого полученного уравнения применяем преобразование Лапласа. Отметим, что алгоритм символьного решения систем ЛОДУ n-го порядка с правыми частями специального вида, использующий преобразование Лапласа, рассматривался в [6–8].

2. Алгоритм решения начально-краевой задачи

Предлагаемый алгоритм решения в символьном виде начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.3) состоит из следующих пяти шагов. Отметим, что шаги со второго по четвертый выполняются итерационно в зависимости от количества M точек разбиения отрезка $(0,T)$ (совпадающего с количеством ЛОДУ 2-го порядка в системе (1.5)).

Приведем краткое описание каждого шага алгоритма.

1. Ввод данных. Для ввода данных используется веб-интерфейс программного комплекса. Начально-краевая задача вида (1.1), (1.2), (1.3) предварительно должна быть аппроксимирована системой (1.5)) дифференциально-разностных уравнений с краевыми условиями (1.6). Ввод данных осуществляется с помощью символьных операторов. На данном шаге вводимые пользователем данные преобразуются в операторы внутреннего языка. Далее операторы преобразуются в структуры данных для дальнейшего решения задачи.

2. Решение дифференциального-разностного уравнения. На данном шаге определяется общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Используется разработанный ранее авторами программный модуль [13] для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик систем автоматического управления. Применяемый метод построения символьного общего решения ЛОДУ основан на преобразовании Лапласа.

Метод решения ЛОДУ 2-го порядка, использующий преобразование Лапласа, состоит из трех следующих основных этапов.

I. Прямое преобразование Лапласа. В результате преобразования функций, содержащихся в дифференциально-разностных уравнениях системы (1.5) и в начальных условиях (1.2), получаем систему алгебраических уравнений (вид получаемой системы алгебраических уравнений см. [12, с. 554]).

II. Решение алгебраической системы. Для решения системы алгебраических уравнений обращается соответствующий оператор (подробнее см. [12, с. 554]).

Результатом на данном этапе является вектор дробно-рациональных функций.

III. Обратное преобразование Лапласа. В результате получаем общее решение системы (1.5) — вектор, имеющий компонентами функции $u_k(x)$, $k = 1, \dots, M$, которые содержат линейные комбинации двух линейно-независимых решений соответствующего однородного уравнения.

Таким образом, результатом выполнения второго шага алгоритма является построение функций $u_k(x)$, $k = 1, \dots, M$, которые зависят от двух числовых параметров c_{2k-1} и c_{2k}.

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Для нахождения параметров c_{2k-1} и c_{2k}, при которых функции $u_k(x)$, $k = 1, \dots, M$, удовлетворяют краевым условиям (1.6), составляется СЛАУ. Для этого вычисляются значения каждой функции $u_k(x)$, $k = 1, \dots, M$, в точках 0 и 1. Полученная таким образом СЛАУ решается стандартным алгоритмом.

Результатом выполнения третьего шага алгоритма являются вычисленные значения параметров c_{2k-1} и c_{2k}.

4. Решение начально-краевой задачи. На данном шаге в выражение для каждого общего решения $u_k(x)$, $k = 1, \dots, M$, системы (1.5) подставляются вычисленные на предыдущем шаге значения параметров c_{2k-1} и c_{2k}.

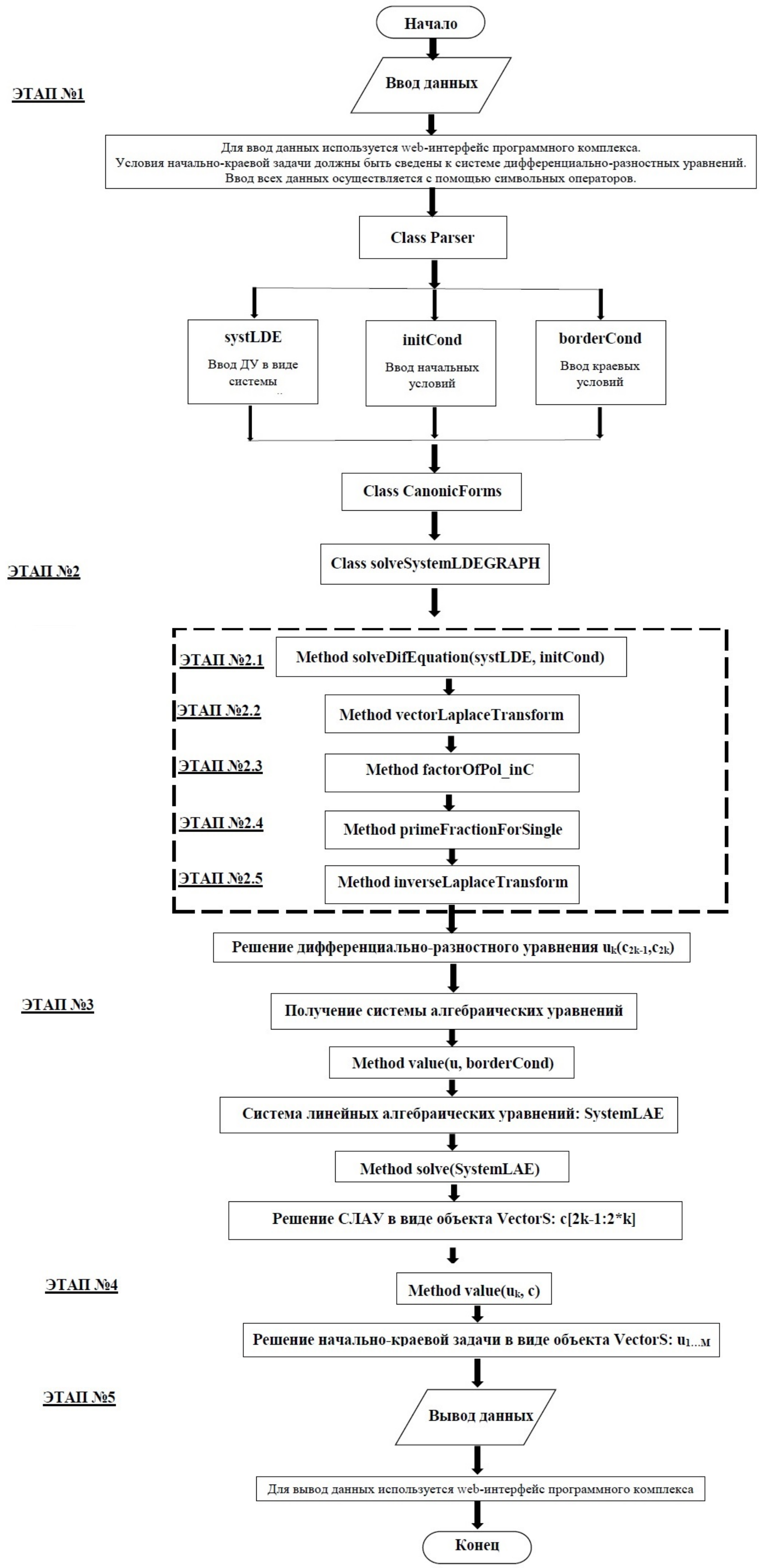
Результатом выполнения четвертого шага является функция $u_k(x)$ — решение краевой задачи (1.5), (1.6), и соответственно, решение $u(x, t_k)$ исходной начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.3) в точках t_k, определяемое формулой

$$u(x, t_k) = u_k(x), \quad k = 0, \dots, M.$$

5. Вывод данных. Для вывода данных используется веб-интерфейс программного комплекса.

Блок-схема описанного алгоритма решения начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.3) приведена ниже.

Блок-схема алгоритма



3. Описание программного комплекса для решения начально-краевой задачи

Для решения начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.3) разработан программный комплекс, который включает в себя программный модуль [13] для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик систем автоматического управления, а также программный модуль для решения системы дифференциально-разностных уравнений.

Описание программного модуля и результаты его использования для символьного решения некоторых конкретных систем линейных дифференциальных уравнений и для расчета динамических характеристик некоторых конкретных систем автоматического управления представлены в статьях [9–12].

Комплекс включает также программный модуль для решения системы дифференциально-разностных уравнений, состоящий из программного класса **SystemLDEGRAPH**, который включает в себя программные методы, предназначенные для решения системы (1.5).

Программный метод ***solveSystemLDEGRAPH*** решает начально-краевую задачу (1.1), (1.2), (1.3) для входной системы с заданными начальными и краевыми условиями.

Метод ***borderCond*** предназначен для преобразования краевых условий во внутренний формат в виде вектора значений.

Программный метод ***borderCondValue*** предназначен для вычисления значений краевых условий в виде вектора значений.

Программный метод ***value*** предназначен для вычисления значений функций в заданной точке.

Программный метод ***solveLE*** предназначен для решения системы алгебраических уравнений.

4. Пример решения начально-краевой задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,1),$$

при начальном условии

$$u(x,0) = \sin(x), \quad x \in [0,\pi],$$

и краевых условиях

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,\pi) = 0, \quad t \in [0,1].$$

Аппроксимируем частную производную $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ разностным отношением (1.4), где

$$\tau = \frac{1}{10} = 0.1, \quad M = 10, \quad t_k = 0.1k, \quad k = 0,\ldots,M.$$

Обозначим $u_k(x) = u(x,t_k)$, $k = 0,\ldots,M$. Таким образом, относительно неизвестных функций $u_k(x)$, $k = 1,\ldots,M$, получим систему дифференциально-разностных уравнений

$$10(u(x,t_k) - u(x,t_{k-1})) = 9u_k''(x) + u_k(x), \quad k = 1,\ldots,M,$$

где

$$u_0(x) = \sin(x),$$

с краевыми условиями

$$u_k(0) = 0, \quad u_k(\pi) = 0, \quad k = 1, \ldots, M.$$

К полученной системе применяем преобразование Лапласа.

При $k = 1$ краевая задача для дифференциально-разностного уравнения имеет вид

$$10(u_1(x) - \sin(x)) = 9u_1''(x) + u_1(x), \qquad u_1(0) = 0, \quad u_1(\pi) = 0.$$

Находим ее решение, получаем функцию $u_1(x) = 0.56\sin(x)$.

При $k = 2$ краевая задача для дифференциально-разностного уравнения имеет вид

$$10(u_2(x) - 0.56\sin(x)) = 9u_2''(x) + u_2(x), \quad u_2(0) = 0, \quad u_2(\pi) = 0.$$

Находим ее решение, получаем $u_2(x) = 0.31\sin(x)$.

Приведем полученные для остальных значений k краевые задачи и их решения:

при $k = 3$ краевая задача принимает вид

$$10(u_3(x) - 0.31\sin(x)) = 9u_3''(x) + u_3(x), \quad u_3(0) = 0, \quad u_3(\pi) = 0,$$

ее решение — функция $u_3(x) = 0.17\sin(x)$;

при $k = 4$ получаем задачу

$$10(u_4(x) - 0.17\sin(x)) = 9u_4''(x) + u_4(x), \quad u_4(0) = 0, \quad u_4(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_4(x) = 0.09\sin(x)$;

при $k = 5$ получаем задачу

$$10(u_5(x) - 0.09\sin(x)) = 9u_5''(x) + u_5(x), \quad u_5(0) = 0, \quad u_5(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_5(x) = 0.05\sin(x)$;

при $k = 6$ получаем задачу

$$10(u_6(x) - 0.05\sin(x)) = 9u_6''(x) + u_6(x), \quad u_6(0) = 0, \quad u_6(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_6(x) = 0.03\sin(x)$;

при $k = 7$ получаем задачу

$$10(u_7(x) - 0.03\sin(x)) = 9u_7''(x) + u_7(x), \quad u_7(0) = 0, \quad u_7(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_7(x) = 0.02\sin(x)$;

при $k = 8$ получаем задачу

$$10(u_8(x) - 0.02\sin(x)) = 9u_8''(x) + u_8(x), \quad u_8(0) = 0, \quad u_8(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_8(x) = 0.01\sin(x)$;

при $k = 9$ получаем задачу

$$10(u_9(x) - 0.01\sin(x)) = 9u_9''(x) + u_9(x), \quad u_9(0) = 0, \quad u_9(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_9(x) = 0.01\sin(x)$;

на заключительном шаге итераций при $k = 10$ получаем задачу

$$10(u_{10}(x) - 0.01\sin(x)) = 9u_{10}''(x) + u_{10}(x), \quad u_{10}(0) = 0, \quad u_{10}(\pi) = 0,$$

находим ее решение и получаем нулевую функцию $u_{10}(x) = 0$.

5. Заключение

Предполагается, что в дальнейшем возможности данного программного комплекса будут расширены и появится возможность решения задач переноса сплошной среды по сетевому носителю (задач тепломассопереноса). В качестве сетевого носителя будет взята сеть (граф).

References

[1] В. Г. Зверев, “Об одной специальной разностной схеме для решения краевых задач тепломассообмена”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **43**:2 (2003), 265–278; англ. пер.:V. G. Zverev, “On a special difference scheme for the solution of boundary value problems of heat and mass transfer”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **43**:2 (2003), 255–267.

[2] Е. П. Сычугова, “Решение уравнения переноса методом конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, **85** (2013), 24 с. [E. P. Sychugova, “Solution of the transport equation by the finite element method on unstructured triangular meshes”, *Preprints of the M. V. Keldysh Institute for Problems of Materials Science*, **85** (2013) (In Russian), 24 pp.]

[3] А. С. Якимов, *Аналитический метод решения краевых задач*, 2-е изд., Издательство Томского университета, Томск, 2011, 199 с. [A. S. Yakimov, *An analytical method for solving boundary value problems*, 2nd ed., Tomsk University Press, Tomsk, 2011 (In Russian), 199 pp.]

[4] Я. А. Ромм, Г. А. Джанунц, “Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для уравнения переноса с итерационном уточнением”, *Современные наукоемкие технологии*, **1** (2020), 21–46. [Ya. E. Romm, G. A. Dzhanunts, “The varying piecewise interpolation solution of the Cauchy problem for the transport equation with iterative refinement”, *Modern High Technologies*, **1** (2020), 21–46 (In Russian)].

[5] Д. Б. Жамбалова, С. Г. Черный, “Метод интерполяционного профиля решения уравнений переноса”, *Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии*, **10**:1 (2012), 33–54. [D. B. Zhambalova, S. G. Cherny, “Method of interpolation profile for solving transport equations”, *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*, **10**:1 (2012), 33–54 (In Russian)].

[6] М. А. Рыбаков, “Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:4 (2009), 791–792. [M. A. Ribakov, “Solving Systems of linear differential equations with constant coefficients by means of Laplace transformation”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:4 (2009), 791–792 (In Russian)].

[7] М. А. Рыбаков, “О нахождении общего и частного решений неоднородной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **17**:2 (2012), 552–565. [M. A. Rybakov, “Computation general and particular solutions of the inhomogeneous system of ordinary differential equations with constant coefficients”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **17**:2 (2012), 552–565 (In Russian)].

[8] М. А. Рыбаков, “Решение систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями с помощью преобразования Лапласа”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **15**:4 (2010), 339–341. [M. A. Rybakov, “Solving systems of linear differential equations with a piecewise continuous right-hand parts by means transformation Laplace”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **15**:1 (2010), 339–341 (In Russian)].

[9] М. А. Рыбаков, “Параллельное вычисление общего решения неоднородной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **18**:4 (2013), 1184–1188. [M. A. Rybakov, “Parallel computation of general solution of the inhomogeneous system of the ordinary differential equations with constant coefficients”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **18**:4 (2013), 1184–1188 (In Russian)].

[10] Н. А. Малашонок, М. А. Рыбаков, "Символьно-численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с требуемой точностью", *Программирование*, **39**:3 (2013), 38–46; англ пер.:N. A. Malaschonok, M. A. Rybakov, "Symbolic-numerical solution of systems of linear ordinary differential equations with required accuracy", *Programming and Computer Software*, **39**:3 (2013), 150–157.

[11] Г. И. Малашонок, М. А. Рыбаков, "Решение систем линейных дифференциальных уравнений и расчет динамических характеристик систем управления в веб-сервисе MathPartner", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 517–529. [G. I. Malaschonok, M. A. Rybakov, "Solving systems of linear differential equations and calculation of dynamic characteristics of control systems in a web service MathPartner", *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 517–529 (In Russian)].

[12] С. А. Глазков, М. А. Рыбаков, "Алгоритмы решения простых типов обыкновенных дифференциальных уравнений в MathPartner", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **22**:6 (2017), 1268–1276. [S. A. Glazkov, M. A. Rybakov, "The symbolic solution of ordinary differential equations in the computer algebra system MathPartner", *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1268–1276 (In Russian)].

[13] М. А. Рыбаков, *Программный модуль для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик систем автоматического управления: программа для ЭВМ*, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021619679; опубл. 15.06.2021, Бюл. № 6, (Ч. 1). 0,5 Мб. [M. A. Rybakov, *Software module for symbolic solution of systems of linear differential equations and calculation of dynamic characteristics of automatic control systems: computer program*, Certificate of state registration of the computer program No. 2021619679; publ. 06/15/2021, Bull. No. 6, (Ch. 1). 0.5 MB].

Информация об авторах

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8761-7174

Рыбаков Михаил Анатольевич, старший преподаватель кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: mixail08101987@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8152-8357

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Рыбаков Михаил Анатольевич
E-mail: mixail08101987@mail.ru

Поступила в редакцию 10.02.2023 г.
Поступила после рецензирования 11.05.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

Information about the authors

Vyacheslav V. Provotorov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8761-7174

Mikhail A. Rybakov, Senior Lecturer Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: mixail08101987@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8152-8357

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Mikhail A. Rybakov
E-mail: mixail08101987@mail.ru

Received 10.02.2023
Reviewed 11.05.2023
Accepted for press 09.06.2023